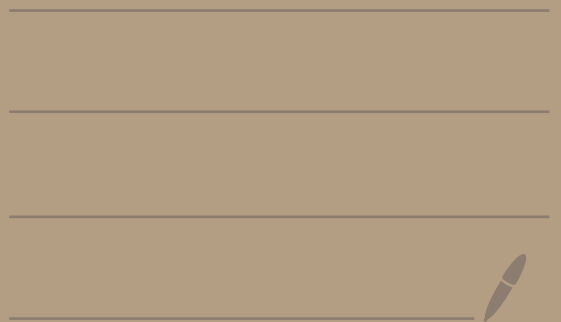


Systemes dynamiques M1
Université de Picardie Jules Verne, 2021



Systèmes dynamiques (V)

III. Théorie ergodique

On se donne un espace mesuré $(X, \mathcal{B}, \mu)$, où X est un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{B}$, et μ une mesure sur $\mathcal{B}$.

Y: $T: X \rightarrow X$ est mesurable, alors la mesure image $T_*\mu$ est définie par

$$T_*\mu(A) = \mu(\underbrace{T^{-1}(A)}_{\in \mathcal{B} \text{ car } T \text{ est mesurable}}), \quad \forall A \in \mathcal{B}.$$

Def.: un système dynamique **mesuré** est défini par une application mesurable

$T: X \rightarrow X$ préservant la mesure μ , i.e., tel que $T_*\mu = \mu$.

Dans la suite, on va s'intéresser aux propriétés statistiques de la dynamique.

Par ex., si $E \subset X$ est un σ -ensemble, et $x \in X$, on peut s'intéresser à la population d'itérés de x dans E , i.e., étant $N \in \mathbb{N}$, on considère

$$\frac{1}{N} \# \{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \text{ t.q. } T^n(x) \in E\}.$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{fonction indicatrice de } E}}{\mathbb{1}_E}(T^n(x))$$

(Somme de Birkhoff le long de l'orbite de x)

Plus généralement, étant donné $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, en théorie ergodique, on s'intéresse au comportement des "moyennes temporelles" pour $x \in X$ et $N \in \mathbb{N}$:

$$S_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n(x).$$

(Hypothèse ergodique de Boltzmann : moyennes temporelles = moyenne spatiale)
↳ par rapport à une mesure

Exemples : ① Si $T : X \rightarrow X$ a un point fixe $x_0 \in X$ ($T(x_0) = x_0$)

alors $\mu = \delta_{x_0}$ est invariante par T
dirac en x_0 .

② Plus généralement, si $T : X \rightarrow X$ a un point périodique $x \in X$, avec

$$T^q(x) = x, \quad q \geq 1, \quad \text{alors } \mu = \delta_x + \delta_{T(x)} + \dots + \delta_{T^{q-1}(x)}$$

est une mesure invariante par T .

(Rappel : si f_y est une mesure de Dirac, alors $\forall A \in \mathcal{B},$
 $T_* f_y(A) = f_y(T^{-1}(A))$
 $= \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin T^{-1}(A) \\ 1 & \text{sinon, si } y \in T^{-1}(A) \end{cases}$
 $= \begin{cases} 0 & \text{si } T(y) \notin A \\ 1 & \text{si } T(y) \in A \end{cases}$

$$\text{d'où } T_* f_y = \delta_{T(y)})$$

En effet, $T_* \mu = T_* (\delta_x + \delta_{T(x)} + \dots + \delta_{T^{q-1}(x)})$

$$= T_x f_x + T_{T(x)} f_{T(x)} + \dots + T_{T^{q-1}(x)} f_{T^{q-1}(x)} \quad \text{par linéarité}$$

$$= f_{T(x)} + f_{T \circ T(x)} + \dots + f_{\underbrace{T \circ T^{q-1}(x)}_{x \text{ car } T^q(x) = x}}$$

$$= f_x + \dots + f_{T^{q-1}(x)} = \mu.$$

(En particulier, à toute orbite périod. on peut associer une mesure invariante
donc les mesures invariantes généralisent la notion de périodicité)

③ la mesure de Lebesgue sur $T' = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est invariante par

① les rotations $\tau_\alpha : x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$

② mais aussi par les dilatations $E_d : x \mapsto dx \pmod{1}$

Dem.: ① on identifie T' à $[0,1]$ en recollant les bords.

si $I = [a,b] \subset [0,1]$ est un intervalle, $\tau_\alpha^{-1}(I) = [a-\alpha, b-\alpha]$
si $a-\alpha, b-\alpha \in [0,1]$

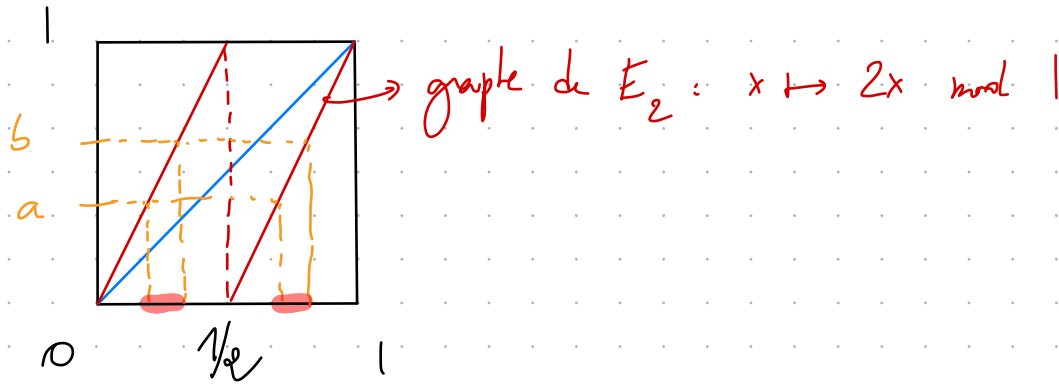
Si on $\pi_\alpha^{-1}(\mathbb{I}) = [0, b-\alpha] \cup [a-\alpha+1, 1]$ si $b-\alpha \in [0,1]$ et $a-\alpha \leq 0$

$\pi_\alpha^{-1}(\mathbb{I}) = [a-\alpha+1, b-\alpha+1]$ si $a-\alpha, b-\alpha \leq 0$.

Dans tous les cas, on a bien $\text{leb}(\pi_\alpha^{-1}(\mathbb{I})) = b-a = \text{leb}(\mathbb{I})$

donc $(\pi_\alpha)_* \text{leb} = \text{leb}$.

⑥ Par ex. pour $d=2$: (de nouveau on identifie $\mathbb{T}$ à $[0,1]/\sim$ où $0 \sim 1$)



$[a,b] \subset [0,1]$: $E_2^{-1}([a,b]) = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right] \sqcup \left[\frac{a}{2} + \frac{1}{2}, \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right]$

d'où $\text{leb}(E_2^{-1}([a,b])) = \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right) + \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right) = b-a = \text{leb}([a,b])$.

- Un SDM (système dyn. mesuré) $(X', \mathcal{B}', \mu', T')$ est un **facteur** de $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ s'il existe $\phi : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X', \mathcal{B}', \mu')$ **mesurable**

$$\begin{cases} \phi(X) = X' \\ \phi_* \mu = \mu' \end{cases}$$

Si de plus ϕ est **invertible** (bijection bi-mesurable) c'est une **conjugaison**.

- Si $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est un SDM, $A \in \mathcal{B}$ t.q. $\mu(A) > 0$, on peut déf. $\mathcal{B}_A := \{B \cap A, B \in \mathcal{B}\}$, $\mu_A := \mu|_{\mathcal{B}_A}$

et si $T^{-1}(A) = A$, alors $T|_A$ préserve μ_A et on peut définir un **sub-SDM** $(A, \mathcal{B}_A, \mu_A, T|_A)$.

1) Théorème de récurrence de Poincaré :

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un SDM avec $\mu(X) < +\infty$.

Si $A \in \mathcal{B}$ vérifie $\mu(A) > 0$, on définit $A^\infty = \left\{ x \in A \text{ t.q. } \exists (n_k)_k \in \mathbb{N}^\mathbb{N} \right.$
 $\left. \text{strictement croissante t.q. } T^{n_k}(x) \in A, \forall k \geq 0 \right\}$.

$$\text{Alors } \mu(A^\infty) = \mu(A).$$

En d'autres termes, presque tout point de A revient une infinité de fois dans A .

Dém. : Soit A_n l'ensemble des $x \in A$ qui ne reviennent pas dans A après le temps n :

$$A_n = \left\{ x \in A \mid \forall p \geq n, T^p(x) \notin A \right\}.$$

Alors les ensembles $A_n, T^{-n}A_n, T^{-2n}A_n$ etc. sont 2-à-2 disjoints : (*)

en effet, si $\exists 0 \leq p < q$ t.q. $T^{-p}A_n \cap T^{-q}A_n \neq \emptyset$

soit $\overset{0}{x}$

alors $y = T^p(x) \in A_n \subset A$ donc $\forall k \geq n, T^k(y) \notin A$ (.)

$$\text{Mais } T^{(q-p)n} y = T^{(q-p)n} (T^{p^n}(x)) \\ = T^{q^n}(x) \in A_n \subset A$$

Absurde car $\underbrace{k=(q-p)n}_{\geq 1} \geq n$ et $T^k(y) \in A$, ce qui contredit $(\cdot)$

Or les ensembles $A_n, T^{-1}A_n, \dots$ ont même mesure $(**)$

$$\left(\mu(T^{-n}(A_n)) = \mu(A_n) \text{ car } T_*\mu = \mu \text{ (donc } T_*^k\mu = \mu, \forall k \geq 1 \text{ en écrivait } T_*^k\mu = T_*^{k-1}(T_*\mu) \text{ etc.)} \right)$$

$$\text{Or } \mu(X) < +\infty \text{ donc } \underbrace{\mu\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} T^{-kn} A_n\right)}_{\substack{(*) + (**) \\ \downarrow \\ \subset X}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty$$

$(\Rightarrow \mu(\cdot) < \mu(X) < +\infty)$

$$\Rightarrow \mu(A_n) = 0$$

$$\text{Donc } \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 0 \text{ et comme } A^\infty = A \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \text{ on a } \mu(A^\infty) = \mu(A)$$



Fusion topologique

Présence : Soit $T : X \rightarrow X$ continu sur X espace topologique, séparable.

Supposons que T préserve une mesure μ de support total.

(compl. du support :
réunion des ouverts
de mesure nulle)

t.q. $\mu(X) < +\infty$.

Alors μ presque tout $x \in X$ est positivement récurrent.

dém. : Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ base d'ouverts.

μ de support total $\Rightarrow \mu(U_i) > 0, \forall i \in \mathbb{N}$.

Soit $U_i^0 = \{x \in U_i \mid \forall n \geq 1, T^n(x) \notin U_i\}$, pour $i \geq 1$.

D'après le résultat préc., $\mu(U_i^0) = 0$ donc $\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i^0\right) = 0$.

donc $\mu\left(X \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i^0\right)\right) = \mu(X)$.

Mais $X \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i^0\right) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (U_i^0)^c$

et $X \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i^c \right)$ est l'ensemble des x t.q. $\forall i \in \mathbb{N}$,

$x \in U_i \Rightarrow \exists n \geq 1$ t.q. $T^n(x) \in U_i$, c'est-à-dire l'ensemble des points récurrents. $\blacksquare$

2) Théorème de Von Neumann (1931)

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ SOM.

Si $f \in L^1(X, \mu)$ alors $\int_X (f \circ T)^p d\mu = \int_X f^p d\mu$ car $T_*\mu = \mu$
 (version fonctionnelle de)

En particulier, si $f \in L^2(X, \mu)$, on a $\int_X |f \circ T|^2 d\mu = \int_X |f|^2 d\mu$.

i.e., l'opérateur $U_T : \begin{cases} L^2(X, \mu) \longrightarrow L^2(X, \mu) \\ f \longmapsto f \circ T \end{cases}$ préserve la norme
 (c'est un opérateur unitaire)

Remarque : • Si $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ & $(X', \mathcal{B}', \mu', T')$ 2 SDM conjugués via $\phi: X \rightarrow X'$

alors $U_T: L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$ & $U_{T'}: L^2(X', \mu') \rightarrow L^2(X', \mu')$

Sont conjugués via $\begin{cases} L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X', \mu') \\ f \mapsto f \circ \phi^{-1} \end{cases}$ (isométrie)

• soit $f \in L^2(X, \mu)$; $(n \geq 0 \rightsquigarrow S_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k)$

$$S_n f = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_T^k \right) (f)$$

$$(U_T^n = (U_T)^n)$$

$\hookrightarrow U_T$ "système dynamique"

• si T est inversible, alors U_T l'est aussi $(U_T)^{-1} = U_{T^{-1}}$

Théorème : (Von Neumann)

$\forall f \in L^2(X, \mu)$, les sommes de Birkhoff $S_n f$ CV dans $L^2(X, \mu)$ vers

$p_{\text{inv}}(f)$ où p_{inv} est la projection orthogonale sur le sous-espace E_{inv} :

$$E_{\text{inv}} = \left\{ g \in L^2(X, \mu) \mid U_T(g) = g \right\} = \ker(U_T - \text{id})$$

$$\Leftrightarrow g \circ T = g$$

(fonctions g invariantes par U_T)

dém. : (dans le cas où T est inversible)

On décompose $f = p_{\text{inv}}(f) + p_{\text{inv}}^\perp(f)$

$\hookrightarrow$ proj. orthogonale sur $E_{\text{inv}}^\perp$

On voit qu'il suffit de m.g. $(S_n f)_{n \geq 0}$ CV $\left\{ \begin{array}{l} \text{vers } f \text{ lorsque } f \in E_{\text{inv}} \\ \text{vers } 0 \text{ lorsque } f \in E_{\text{inv}}^\perp \end{array} \right.$

(par linéarité)

$$S_n f = S_n(p_{\text{inv}}(f)) + S_n(p_{\text{inv}}^\perp(f))$$

① $\forall f \in E_{\text{inv}}, U_T(f) = f$
 et $\int_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(U_T)^k f}_{=f} = f$: ok
remarque précédente

② $E_{\text{inv}} = \ker(U_T - \text{id})$

lemme : $(\ker(U_T - \text{id}))^\perp = \overline{\text{Im}(U_T - \text{id})}$ → fermeture

↳ *dém.* : $((E^\perp)^\perp = \overline{E})$ quand E est un sous-espace vectoriel

Le lemme revient à m.q. $\ker(U_T - \text{id}) = (\text{Im}(U_T - \text{id}))^\perp$

• ⊆ si $\underbrace{U_T f = f}_{(f \in \ker(U_T - \text{id}))}$, si $(U_T g - g) \in \text{Im}(U_T - \text{id})$,

alors $\langle f, U_T g - g \rangle = \langle f, U_T g \rangle - \langle f, g \rangle$
 $\xleftarrow{\text{Car } U_T \text{ unitaire}}$ $= \langle U_T^{-1} f, g \rangle - \langle f, g \rangle$

$$= \langle \underbrace{U_T^{-1}f}, g \rangle - \langle f, g \rangle$$

$f \text{ car } U_T f = f \Rightarrow U_T^{-1} f = f$

$$= \langle f, g \rangle - \langle f, g \rangle = 0$$

• 5 s. $f \in (\operatorname{Im}(U_T - \operatorname{id}))^\perp, g \in L^2(X, \mu)$

$$\langle U_T^{-1}f - f, g \rangle = \langle U_T^{-1}f, g \rangle - \langle f, g \rangle$$

$$\xleftarrow{U_T \text{ unitaire}} = \langle f, U_T g \rangle - \langle f, g \rangle$$

$$= \langle f, \underbrace{U_T g - g} \rangle$$

$$(U_T - \operatorname{id})(g) \in \operatorname{Im}(U_T - \operatorname{id})$$

$$= 0 \text{ car } f \in (\operatorname{Im}(U_T - \operatorname{id}))^\perp$$

C'est vrai pour tout $g \in L^2(X, \mu)$ donc $U_T^{-1}f - f = 0$

donc $U_T f = f$, i.e. $f \in \ker(U_T - \operatorname{id})$. ■

Pour conclure la preuve du thm de Von Neumann, il reste à m.g.

Si $f \in E_{\text{inv}}^\perp = \overline{\text{Im}(U_T - \text{id})}$, alors $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_T^k f \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

↖ d'après le lemme

(a) Soit où $f = U_T g - g \in \text{Im}(U_T - \text{Id})$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_T^k f = \frac{1}{n} (U_T^n g - g)$$

$U_T^{k+1} g - U_T^k g$ par linéarité

Somme télescopique

Or $\|U_T^n g - g\| \leq \|U_T^n g\| - \|g\| = 2\|g\|$ car U_T est unitaire

↑ inég. triang.

Donc $\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_T^k f \right\| \leq \frac{2}{n} \|g\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

⑥ Cas général : soit $f \in \overline{\text{Im}(U_T - \text{id})}$

alors $\forall \varepsilon > 0, \exists g \in \text{Im}(U_T - \text{id})$ t.q. $\|f - g\| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (U_T)^k f - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_T^k g \right\| \\ &= \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} U_T^k (f - g) \right\| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\|U_T^k (f - g)\|}_{= \|f - g\| \text{ car } U_T \text{ est unitaire}} = \|f - g\| < \varepsilon. \quad (\heartsuit) \end{aligned}$$

↑
inég. triang.

Comme $g \in \text{Im}(U_T - \text{id})$, d'après ci-dessus (a),

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n \geq n_0 \Rightarrow \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_T^k g \right\| < \varepsilon \quad (\#)$$

$$\text{donc } n \geq n_0 \Rightarrow \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_T^k f \right\| < 2\varepsilon \quad \blacksquare$$

(\heartsuit) + (\#)

3) Théorème ergodique de Birkhoff

Théorème : (1931)

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un SDM avec $\mu(X) < +\infty$. Soit $f \in L^1(X, \mu)$.

Alors il existe $f^* \in L^1(X, \mu)$ telle que

- ① Pour μ -presque tout $x \in X$,
$$\left(S_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) \right)_{n \geq 1} \text{ cv vers } f^*(x).$$
- ② f^* est T -invariante ($f^* \circ T = f^*$) et
$$\int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu.$$
- ③ Soit $\mathcal{G}$ le tribu des événements T -invariants ; alors $f^* = E(f | \mathcal{G})$.
($A \in \mathcal{G} \Leftrightarrow A \in \mathcal{B}$ et $\mu(T^{-1}A \Delta A) = 0$)
- ④ Si T est inversible, alors pour μ -p.t. $x \in X$,
$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^{-k}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f^*(x).$$

Lim: on définit $f^* : x \mapsto \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x)$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{S_n f(x)}$

$f_* : x \mapsto \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n f(x).$

Alors f^*, f_* sont T -invariants, et $-\infty \leq f_* \leq f^* \leq +\infty$, et pour montrer le résultat, on va vérifier que $f^* = f_*$ p.s.; pour cela on m.q. pour N grand, $S_N f(x)$ est avec grande proba. presque aussi grande que $f^*(x)$ et presque aussi petite que $f_*(x)$.

lemme: soit $b \in \mathbb{R}$, et posons $S_b := \{x \in X \mid f^*(x) > b\}$.

Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N$ grand, $\exists B_{b,N,\varepsilon} \subset S_b$ avec $\mu(S_b \setminus B_{b,N,\varepsilon}) < \varepsilon$ t.q. $\forall x \in B_{b,N,\varepsilon}$

$$S_N f(x) > b - \varepsilon.$$

preuve du lemme: Fixons b et $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ petit (à préciser par la suite).
 Pour $m > 0$, on écrit $f = f \mathbb{1}_{\{|f| \leq m\}} + f \mathbb{1}_{\{|f| > m\}}$ $\leadsto \mathbb{E} \left(|f| \mathbb{1}_{\{|f| > m\}} \right)$
 CV dominée $\xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\leq |f| \in L^1(X, \mu)}$
 et CV p.s. vers 0 par le fait que $f \in L^1(X, \mu)$

donc pour m assez grand $f = f_1 + f_2$
 avec $|f_1| \leq m$ et $\mathbb{E}(|f_2|) < \delta^2$.

Par déf. de $\mathcal{S}_b$, pour p.t. $x \in \mathcal{S}_b$, $\exists_{\substack{l(x) \\ (< +\infty)}}^{\text{premier entier t.q.}} \mathcal{S}_{l(x)} f(x) > b$. (1)

$$\text{On écrit } \mu(\mathcal{S}_b) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathcal{S}_b \mid l(x) = n\}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu\{x \in \mathcal{S}_b \mid l(x) = n\} < +\infty$$

$$\text{donc pour } n \text{ assez grand, } \mu\left(\{x \in \mathcal{S}_b \mid l(x) > n\}\right) < \frac{f^2}{m}. \quad (2)$$

$\Rightarrow$ On dit que $x \in \mathcal{S}_b$ est *mauvais* si $l(x) > n$; on note $M_{\mathcal{S}_b}$ l'ensemble des points mauvais.

$$\text{Soit } N \in \mathbb{N} \text{ grand t.q. } \frac{n}{N} < \frac{f}{m}.$$

Par (2), on a $\mathbb{E}(\mathcal{S}_N \mathbb{1}_M) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{lin. de } \mathbb{E} + T_N \mu = \mu}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{1}_M) = \mu(M) < \frac{f^2}{m}$, donc par Markov :

$$\mu\left(\mathcal{S}_N \mathbb{1}_M > \frac{f}{m}\right) \leq \frac{\mathbb{E}(\mathcal{S}_N \mathbb{1}_M)}{f/m} < \frac{f^2/m}{f/m} = f. \quad (3)$$

Comme $\mathbb{E}(|f_2|) < f^2$ on a aussi

$$\mathbb{E}(\mathcal{S}_N |f_2|) = \mathbb{E}(|f_2|) < f^2 \text{ d'où par Markov :}$$

$$\mu(\mathcal{S}_N |f_2| > f) \leq \frac{\mathbb{E}(\mathcal{S}_N |f_2|)}{f} < \frac{f^2}{f} = f. \quad (4)$$

$$\text{Soit } B_{b, N, \varepsilon} := \left\{ x \in S_b \mid S_N \mathbb{1}_M(n) \leq \frac{\delta}{n} \text{ et } S_N \underbrace{|f_2|}_{(\#)}(x) \leq \delta \right\}$$

$$\text{Par (3) et (4) on a } \mu(S_b \setminus B_{b, N, \varepsilon}) < \delta + \delta < \varepsilon \text{ si } \delta \in]0, \frac{\varepsilon}{2}[$$

$$\text{Soit maintenant } x \in B_{b, N, \varepsilon}. \text{ Par l'irréductibilité de } f^*, \text{ on a } \underbrace{O_T^+(n)}_{\{x, T(x), \dots\}} \subset S_b$$

$$\text{Comme } \frac{1}{N} \# \left\{ n \in [0, N-1] \mid T^n(x) \notin M \right\} = 1 - S_N \mathbb{1}_M(n) \geq 1 - \frac{\delta}{n} > 0$$

$$\exists j, \text{ plus petit entier positif t.q. } T^{j_1}(n) \notin M. \text{ On a donc } l_1 := l\left(\underbrace{T^{j_1}(n)}_{\notin M}\right) \leq n \quad \left(\begin{smallmatrix} \text{par def.} \\ \text{de } M \end{smallmatrix}\right)$$

$$\text{et } S_{l_1} f(T^{j_1}(n)) > b \quad \text{par (1)}$$

on définit récursivement des suites $(j_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ et $(l_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ par

$$\begin{cases} j_{i+1} := \text{plus petit entier } \geq j_i + l_i \text{ t.q. } T^{j_{i+1}}(x) \notin M. \\ l_{i+1} := l(T^{j_{i+1}}(n)) \leq n. \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{l_i} f(T^{j_i}(n)) > b \quad (5)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ le + grand indice t.g. $j_n + l_n \leq N-1$.

Les intervalles $(I_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont 2 à 2 disjoints et si $k \in [0, N-1] \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i$, alors

$$[j_i, j_i + l_i - 1]$$

soit $T^k x \in M$

soit $k \in [N-n, \dots, N-1]$

Comme $S_N \mathbb{1}_M(x) \leq \frac{f}{m}$, et $\frac{n}{N} < \frac{f}{m}$, on a donc

$$\frac{\# \bigcup_{i=1}^n I_i}{N} = \frac{l_1 + \dots + l_n}{N} > 1 - \frac{2f}{m} \quad (6)$$

Finalement on obtient (on pose $U := [0, N-1] \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i$)

$$S_N f(x) = \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{l_i-1} f \circ T^{j_i+k}(x)}_{\Sigma_1} + \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k \in U} f \cdot T^k(x)}_{\Sigma_2}$$

$$\text{On a } \Sigma_1 = \frac{\sum l_i}{N} \frac{1}{\sum l_i} \left(l_1 \underbrace{s_{l_1}(T^{j_{l_1}}(u))}_{>b} + \dots + l_n \underbrace{s_{l_n}(T^{j_{l_n}}(u))}_{>b} \right)$$

$$> \left(\frac{\sum l_i}{N} \right) b > \left(1 - \frac{2\delta}{m} \right) b.$$

$$\text{et } |F_2| \leq \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k \in U} |f_1 \circ T^k(x)|}_{\leq m \frac{|U|}{N}} + \underbrace{s_N |f_2|(x)}_{\leq \delta \text{ (par \#)}} \leq 3\delta,$$

$$\stackrel{(c)}{\leq} m \frac{2\delta}{m}$$

$$\text{d'où } s_N f(x) > \left(1 - \frac{2\delta}{m} \right) b - 3\delta > b - \delta \left(3 + \frac{2}{m} \right) > b - \varepsilon, \text{ pour } \delta \text{ assez petit. } \blacksquare$$

fin de la preuve de Birkhoff:

de manière analogue, pour $a \in \mathbb{R}$ on définit $I_a := \{x \in X \mid f_n(x) < a\}$.

De même que pour le lemme précédent, on a $\forall \varepsilon > 0, \forall N \text{ grand}, \exists C_{a,N,\varepsilon} \subset I_a$
avec $\mu(I_a \setminus C_{a,N,\varepsilon}) < \varepsilon$ t.q. $\forall x \in C_{a,N,\varepsilon}$:

$$\int_N f(x) < a + \varepsilon.$$

Si $a < b$, $\mu(I_a \cap S_b) = 0$. En effet sinon, pour $\varepsilon \in]0, \frac{\mu(I_a \cap S_b)}{2}[$, on a

$$\mu(C_{a,N,\varepsilon} \cap B_{b,N,\varepsilon}) \geq \mu(I_a \cap S_b) - 2\varepsilon > 0 \text{ donc } \exists x \in C_{a,N,\varepsilon} \cap B_{b,N,\varepsilon} \text{ et donc}$$

$$b - \varepsilon < \int_N f(x) < a + \varepsilon, \text{ impossible si } \varepsilon < \frac{b-a}{2}$$

$$\leadsto \mathcal{D}^0 := \bigcup_{\substack{a < b \\ a, b \in \mathbb{Q}}} I_a \cap S_b \text{ satisfait } \mu(\mathcal{D}^0) \leq \sum_{\substack{a < b \\ a, b \in \mathbb{Q}}} \underbrace{\mu(I_a \cap S_b)}_{=0} = 0$$

et $\forall x \in X \setminus \mathcal{D}^0$, $f^*(x) = f_*(x)$, ce qui conduit la preuve de (1).

$$\bullet f^* = \limsup_n \int_n f \text{ est } T\text{-invariante et } \forall n \geq 1,$$

$$\mathbb{E}(\int_n f) \underset{\substack{\mathbb{E} \text{ lin.} \\ + T_* \mu = \mu}}{\uparrow} \mathbb{E}(f)$$

so si f est bornée on applique le Thm de CV dominée pour conclure que $\mathbb{E}(f^*) = \mathbb{E}(f)$.

Si f est simple dans $L^1(X, \mu)$, comme préc. on écrit $f = f_1 + f_2$

$$\forall 1 \leq n \text{ et } \mathbb{E}(f_2^n) < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \text{ petit.}$$

$$\sim f^n = f_1^n + f_2^n \quad \text{avec} \quad \mathbb{E}(f_1^n) = \mathbb{E}(f_1) \quad (\text{car } f_1 \text{ borné})$$

$$\mathbb{E}(|f_2^n|) \leq \int_X \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f_2 \circ T^k(x)| d\mu(x)$$

$$\leq \lim_n \int_X \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f_2 \circ T^k(x)| d\mu(x) \\ = \underbrace{\mathbb{E}(S_n f_2)}_{< \varepsilon} < \varepsilon$$

$< \varepsilon$

$\Rightarrow f^n$, donc f^n sont dans $L^1(X, \mu)$, et

$$|\mathbb{E}(f^n) - \mathbb{E}(f)| = |\mathbb{E}(f_2^n) - \mathbb{E}(f_2)| \leq \mathbb{E}(|f_2^n|) + \mathbb{E}(|f_2|) < 2\varepsilon.$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \mathbb{E}(f^n) = \mathbb{E}(f).$$

• si $A \in \mathcal{G}$, $\mu(A) > 0$, on a également

$$\int_A f^* d\mu = \int_A f d\mu \quad (**)$$

En effet, on remplace X par A

$$\begin{cases} T \text{ par } T|_A : A \rightarrow A \\ \mu \text{ par } \mu_A := \frac{\mu|_A}{\mu(A)} \end{cases}$$

f^* est $\mathcal{G}$ -mesurable (car T -inv.), et $(**)$ $\Rightarrow \mathbb{E}\left(\left(f^* - f\right) \mathbb{1}_A\right) = 0$, $\forall A \in \mathcal{G}$

d'où $f^* = \mathbb{E}(f | \mathcal{G})$ p.s. $\blacksquare$

ergodicité

Def.: (ergodicité)

On dit que le SDM $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est **ergodique** si $\forall A \in \mathcal{B}$,

$$T^{-1}(A) = A \implies \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(X \setminus A) = 0$$

(en d'autres termes, les seuls ensembles invariants sont triviaux du point de vue de la mesure)

Prop.: $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est ergodique ssi $\forall f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable,

si $f \circ T = f$ alors f est constante presque partout.

Ergodicité et sommes de Birkhoff

Prop.: Si $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est ergodique, alors pour tout $f \in L^1(X, \mu)$, pour μ -p.t. $x \in X$,

$$\underbrace{S_n f(x)}_{\text{moyenne temporelle}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu & \text{si } \mu(X) < +\infty \\ 0 & \text{si } \mu(X) = +\infty. \end{cases}$$

"moyenne spatiale"

(En lien avec l'hypothèse de Boltzmann : le système considéré est ergodique)

Dém.: $\int_n f \rightarrow f^*$ μ -p.p. d'après Birkhoff

et $f^* \circ T = f^*$ donc Comme on suppose T ergodique, on a f^* est constante μ -p.p.

De plus Birkhoff nous dit $\int f^* = \int f$

donc $f^*(x) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f \, d\mu$ p.p., si $\mu(X) < +\infty$.

Si $\mu(X) = +\infty$, $f^* \in L^1(X, \mu) \Rightarrow f^* = 0$ p.p. $\blacksquare$
(Constante)

4) Mesures invariantes pour les systèmes dynamiques topologiques

X = espace métrique compact, $\mathcal{B}$ = tribu des Boreliens de X

et $T : X \rightarrow X$ système discret topologique (T continu).

on définit $\mathcal{M}_T(X) = \left\{ \mu \text{ mesure de proba. sur } X, \underbrace{T \text{ invariante}}_{T_* \mu = \mu} \right\}$

Propriété : $\mathcal{M}_T(X)$ est convexe :

$\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_T(X), \forall \alpha \in [0, 1], \alpha \mu_1 + (1-\alpha) \mu_2 \in \mathcal{M}_T(X),$

$$\text{car } (\alpha \mu_1 + (1-\alpha) \mu_2)(X) = \alpha \mu_1(X) + (1-\alpha) \mu_2(X) = 1$$

$$\text{et } T_* (\alpha \mu_1 + (1-\alpha) \mu_2) = \alpha \underbrace{T_* \mu_1}_{\mu_1} + (1-\alpha) \underbrace{T_* \mu_2}_{\mu_2} = \alpha \mu_1 + (1-\alpha) \mu_2$$

$\text{car } \mu_i \in \mathcal{M}_T(X), i=1,2$

Théorème : (Krylov - Bogolioubov)

(X compact) $\mathcal{M}_T(X) \neq \emptyset$: toute transfo. continue sur un espace métrique compact admet une mesure de proba. invariante.